Резюме докладов, сделанных на заседаниях семинара по теории вероятностей и математической статистике в Математическом институте АН СССР,

Теория вероятн. и ее примен., 1973, том 18, выпуск 3, 669–679

https://www.mathnet.ru/tvp2748

РЕЗЮМЕ ДОКЛАДОВ, СДЕЛАННЫХ НА ЗАСЕДАНИЯХ СЕМИНАРА ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКЕ В МАТЕМАТИЧЕСКОМ ИНСТИТУТЕ АКАДЕМИИ НАУК СССР

1972

Заседание 30 мая.

Конаков В. Д., Свойства некоторых функций от непараметрических оценок плотности.

Рассмотрим n взаимно независимых двумерных случайных векторов $(X_1, Y_1), \ldots, (X_n, Y_n)$, имеющих плотность $f(x, y)$. В качестве оценки $f(x, y)$ в точке (x, y) рассмотрим непараметрическую оценку вида

$$\hat{f}_n(x, y) = n^{-1} b^{-2}(n) \sum_{j=1}^{n} h\left(\frac{x - X_j}{b(n)}, \frac{y - Y_j}{b(n)}\right),$$

где $b(n) = o(1)$, $n^{-1}b^{-2}(n) = o(1)$, $h(x, y) = h_1(x) h_2(y)$ — двумерное «окно» ([1]). Формулируются условия на $f(x, y)$, $h(x, y)$ и функцию $g(y)$, при которых $\hat{J}_n(x) = \int g(y) \hat{f}_n(x, y)\, dy$ является асимптотически несмещенной, состоятельной и асимптотически нормальной оценкой $J(x) = \int g(y) f(x, y) dy$, и получены асимптотические разложения для $\mathbf{E}\hat{J}_n(x)$ и $\mathbf{D}\hat{J}_n(x)$. Это составляет содержание теоремы 1. Теорема 2 утверждает, что если условия теоремы 1 выполнены при $x \in [Z_1, Z_2]$, то $\hat{J}_n(x)$, $x \in [Z_1, Z_2]$ — асимптотически гауссовский процесс с независимыми значениями. Обобщение этого результата для $(k+1)$-мерного процесса $\xi_n^{(k)}(x) = (\int \hat{f}_n(x, y) dy, \ldots, \int y^k \hat{f}_n(x, y) dy)$ дано в теореме 3.

Введем $\xi^{(k)}(x) = (\int f(x, y) dy, \ldots, \int y^k f(x, y) dy)$. Важное место занимает теорема 4, которую мы приведем в точной формулировке.

Теорема 4. *Пусть* $\varphi(z_1, \ldots, z_{k+1})$ — *функция, дифференцируемая в окрестности точки* $\xi^{(k)}(x)$. *Тогда, если* $\xi_n^{(k)}(x)$ *удовлетворяет условиям теоремы* 1 (*покомпонентно*), *то случайная величина* $\sqrt{nb(n)}\,[\varphi(\xi^{(k)}(x) - \varphi(\xi^{(k)}(x))]$ *асимптотически нормальна с нулевым средним и дисперсией*

$$\sum_{i,j} \sigma_{ij} \frac{\partial\varphi}{\partial z_i} \frac{\partial\varphi}{\partial z_j}\bigg|_{\xi^{(k)}_{(x)}},$$

где $\sigma_{ij} = \int h_1^2(y)\, dy \cdot \int y^{i+j} f(x, y)\, dy.$

Отсюда, например, следует асимптотическая нормальность непараметрической оценки линии регрессии, доказанная в [2]. Результат теоремы 4 применяется затем к исследованию непараметрических оценок условных центральных моментов

$$\hat{m}_n^{(k)} = \int (y - \hat{r}_n(x))^k \hat{f}_n(y \mid x)\, dy, \quad \hat{r}_n(x) = \frac{\int y \hat{f}_n(x, y)\, dy}{\int \hat{f}_n(x, y)\, dy},$$

поскольку $\hat{m}_n^{(k)}$ можно привести к виду $\tilde{\varphi}(\xi_n^{(k)}(x))$, где $\tilde{\varphi}$ легко выписать. Если распределение $f(x, y)$ ограничено по y, то можно показать, что

$$\mathbf{E}\tilde{\varphi}(\xi_n^{(k)}(x)) = \tilde{\varphi}(\mathbf{E}\xi_n^{(k)}(x)) + O(n^{-\frac{1}{2}} b^{-\frac{1}{2}}(n)).$$

Рассмотрим, далее, k-мерный случайный вектор $\hat{\mathbf{Z}}_n = (\hat{z}_{n1}, \ldots, \hat{z}_{nk})$, где $\hat{z}_{ni}$ вида $\int g_i(y) \hat{f}_n(x, y) dy$, либо $\hat{f}_n(x, y)$, и вектор $\mathbf{Z} = (z_1, \ldots, z_k)$, полученный из $\hat{\mathbf{Z}}_n$ заменой $\hat{f}_n$ на f. Пусть $\varphi(z_1, \ldots, z_k)$ дифференцируема в окрестности точки $\mathbf{Z}$. В предположении, что $\hat{z}_{ni}$, $i = 1, \ldots, k$, удовлетворяют условиям теоремы 1, получены асимптотические разложения для отклонения $\varphi(\hat{\mathbf{Z}}_n) - \varphi(\mathbf{Z})$.

В частности, если все компоненты $\hat{z}_{ni}$ интегрального вида, то при наилучшем выборе последовательности $b(n)$ (а именно, при $b(n) = b_0 n^{-1/4}$) отклонения $\varphi(\hat{\mathbf{Z}}_n) - \varphi(\mathbf{Z})$ имеют порядок (по вероятности), равный $Cn)^{-2/5}$. В противном случае оптимальный выбор $b(n)$ $(b(n) = b_0 n^{-1/6})$ дает порядок отклонения (по вероятности) $Cn^{-1/3}$.

ЛИТЕРАТУРА

1] V. Murthy, Nonparametric estimation of multivariate densities with applications Multivariate Analysis, vol. 1, Acad. Press, N. Y., 1966, 43—55.

[2] Э. А. Надарая, Непараметрические оценки кривой регрессии, Труды Вычислит. Центра (Акад. наук ГрузССР), 5 (1965), 56—68.

Юдина А. С. Применение дисперсионного анализа в близнецовом методе генетики.

Исследования моно- и дизиготных близнецов одинакового возраста, находящихся в одинаковых условиях среды, составляют предмет близнецового метода в генетике. При этом, исходя из положения о различии генетического происхождения моно- и дизиготных близнецов, наблюдаемое значительно большее внутрипарное сходство по какому-либо признаку у монозиготных близнецов по сравнению с дизиготными позволяет отнести данный признак к наследственно обусловленным.

Пусть исследовано по N пар моно- и дизиготных близнецов определенного возраста по некоторому признаку Y. Эти данные считаем случайными выборками из бесконечных совокупностей пар близнецов. Обозначим y_{ij} значение признака Y у j-го близнеца ($j = 1, 2$,) i-й пары ($i = 1, 2, \ldots, N$), получаем следующий ряд пар:

$$\begin{pmatrix} y_{11} y_{12} \ldots y_{1N} \\ y_{21} y_{22} \ldots y_{2N} \end{pmatrix}.$$

Эти данные будем рассматривать как таблицу в однофакторном дисперсионном анализе. Предполагаем, что уравнение модели имеет вид ([1], гл. 7, § 7.2) $y_{ij} = \mu + a_i + e_{ij}$, где $\{a_i\}$ и $\{e_{ij}\}$ независимы в совокупности и имеют нулевые средние; $\{a_i\}$ одинаково распределены с дисперсией σ_A^2, $\{e_{ij}\}$ одинаково распределены с дисперсией σ_e^2. Дисперсия наблюдения y_{ij} равна

$$\sigma_y^2 = \sigma_A^2 + \sigma_e^2.$$

Для выявления генетической обусловленности рассматриваемого признака с помощью F-критерия проверяется гипотеза $H : \sigma_A^2 \leqslant \theta\sigma_e^2$ [1]. Так как [1] $\sigma_e^2 = \mathbf{M}(s_2^2)$, $2\sigma_A^2 + \sigma_e^2 = \mathbf{M}(s_1^2)$, где S_1^2 — дисперсия между парами, S_2^2 — дисперсия внутри пар, то гипотеза эквивалентна следующей: $\mathbf{M}(s_1^2) \leqslant (2\theta + 1)\ \mathbf{M}(s_2^2)$. При $\theta = 0$ приходим к гипотезе $\sigma_A^2 = 0$, которая в близнецовом методе часто оказывается непригодной. Данный признак считаем генетически обусловленным, если гипотеза H, при выбранном надлежащим образом значении θ, для монозиготных близнецов отвергается, а для дизиготных принимается.

В принятой модели наблюдения не являются статистически независимыми, статистическая зависимость определяется внутриклассовым коэффициентом корреляции [1] $\rho = \sigma_A^2/(\sigma_A^2 + \sigma_e^2)$, который может быть принята за показатель, характеризующий внутрипарное сходство близнецов. В генетике степень наследственности рассматриваемого признака определяют по величине коэффициента наследуемости $h^2 = 2(\tilde{\rho}_{\text{МБ}} - \tilde{\rho}_{\text{ДБ}})$, где $\tilde{\rho}$ — выборочный коэффициент корреляции соответственно для моно- и дизиготных близнецов. Проверка гипотезы H дает возможность сравнить величину коэффициента наследуемости со степенью различия дисперсии внутри и вне пар для выборок моно- и дизиготных близнецов, что выявляет качественную характеристику величины коэффициента h^2.

Было проведено исследование по определению степени генетической обусловленности различных психофизиологических признаков человека. Результаты частично опубликованы в работе [2].

ЛИТЕРАТУРА

[1] Г. Шеффе, Дисперсионный анализ, Физматгиз, М., 1963.
[2] Условия формирования и пути предупреждения неврозов и аномалий личности, Труды под редакцией Г. К. Ушакова, Б. П. Петракова, М., 1972.

1973

Заседание 13 февраля.

Ширяев А. Н., О передаче гауссовского процесса по каналу с белым шумом с использованием обратной связи.

Заседание 13 марта.

Спитцер Ф. (США), Случайные блуждания со случайными переходными вероятностями.

Заседание 27 марта.

Мартынов Г. В., Вычисление предельного распределения статистик критерия нормальности типа ω^2.

Пусть задана последовательность $X_1, \ldots, X_n$ независимых наблюдений случайной величины X с функцией распределения $F(x)$. Пусть $\Phi(x)$ — стандартная функция нормального распределения,

$$\begin{aligned}
&Q_1(x, \theta^{[1]}) = \Phi(x - \theta^{[1]}), \quad -\infty < \theta^{[1]} < \infty,\\
&Q_2(x, \theta^{[2]}) = \Phi(x/\theta^{[2]}), \quad \theta^{[2]} > 0,\\
&Q_3(x, \theta^{[3]}) = \Phi((x - \theta_1^{[3]})/\theta_2^{[3]}), \quad \theta^{[3]} = (\theta_1^{[3]}, \theta_2^{[3]}),\\
&\qquad -\infty < \theta_1^{[3]} < \infty, \quad \theta_2^{[3]} > 0.
\end{aligned}$$

Проверяются гипотезы $H_i : F(x) \in \{Q(x, \theta^{[i]}\}$, $i = 1, 2, 3$, с использованием стастатистик следующего вида:

$$\omega_n^2 = n \int_{-\infty}^{\infty} (G_n(x) - Q_i(x, \bar\theta^{[i]}))^2 \, dQ_i(x, \bar\theta^{[i]}),$$

где $\bar\theta^{[i]}$ — оценка неизвестного параметра $\theta^{[i]}$, $i = 1, 2, 3$, использующая выборочные среднее значение и дисперсию. Рассматривается метод вычисления предельных функций распределения статистик ω^2 для проверки гипотез H_1, H_2, H_3.

Статистики ω_n^2 в случае справедливости одной из гипотез H_1, H_2 или H_3 имеют предельное распределение, совпадающее с распределением случайной величины (см. [2], [3])

$$\omega^2 = \int_0^1 Y^2(t) \, dt = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{v_k^2}{\lambda_k},$$

где $Y(t)$ — нормальный случайный процесс с нулевым средним и корреляционной функцией, соответственно, $K_1(t, \tau) = K_0(t, \tau) - h_1(t) h_1(\tau)$ $K_2(t, \tau) = K_0(t, \tau) - h_2(t) h_2(\tau)$, или $K_3(t, \tau) = K_0(t, \tau) - h_1(t) h_1(r) - h_2(t) h_2(\tau)$, где

$$K_0(t, \tau) = \min(t, \tau) - t\tau, \; h_1(t) f(\psi(t)),$$

$$h_2(t) = \psi(t) f(\psi(t))/\sqrt{2}, \; f(x) = \Phi'(x), \; \psi(t) = \Phi^{-1}(t);$$

λ_k, $k = 1, 2, \ldots$,— собственные числа интегрального оператора

$$A\varphi(t) = \int_0^1 K_i(t, \tau) \varphi(\tau) d\tau;$$

v_k, $k = 1, 2, \ldots$,— независимые случайные величины, имеющие стандартное нормальное распределение.

Собственные числа для ядер $K_1(t, \tau)$, $K_2(t, \tau)$, $K_3(t, \tau)$ являются, соответственно, корнями следующих уравнений:

$$\sin\frac{\sqrt{\lambda}}{2} D_1(\sqrt{\lambda}) = 0, \; \cos\frac{\sqrt{\lambda}}{2} D_2(\sqrt{\lambda}) = 0, \; D_1(\sqrt{\lambda}) D_2(\sqrt{\lambda}) = 0,$$

где $D_1(\mu)$ и $D_2(\mu)$ — некоторые функции, приведенные в [3]. С помощью дальнейших преобразований получены следующие выражения для $D_1(\mu)$ и $D_2(\mu)$:

$$D_1(\mu) = \cos\frac{\mu}{2} - \mu \int_0^{1/4} S_1(z) \sin 2\mu z dz, \quad D_2(\mu) = \sin\frac{\mu}{2} - \mu \int_0^{1/4} S_2(z) \cos 2\mu z dz,$$

$$S_1(z) = 4\psi(1/4 - z) h_1(1/4 - z) - 4\psi(1/4 + z) h_1(1/4 + z) - 4\int_{-1/4}^{1/4} \operatorname{sign}(v + z) h_1(|v + z|) \times$$
$$\times \frac{dv}{h_1(1/2 - |v - z|)},$$

$$S_2(z) = 4h_2(1/4 - z)(1 - \psi^2(1/4 - z)) + 4h_2(1/4 + z)(1 - \psi^2(1/4 + z)) -$$
$$- 8\int_{-1/4}^{1/4} \operatorname{sign}(v^2 - z^2) h_2(|v + z|) \frac{\psi(1/2 - |z - v|)}{h_1(1/2 - |z - v|)} dv.$$

Было вычислено по 200 наименьших корней каждого из уравнений $D_1(\mu) = 0$ и $D_2(\mu) = 0$.

Определители Фредгольма для ядер $K_i(t, \tau)$, $i=1, 2, 3$, могут быть аппроксимированы следующим образом:

$$D(\lambda) \approx \frac{\sin\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}} \prod_{k=1}^{M} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_k}\right) \Big/ \prod_{k=1}^{M+1} \left(1 - \frac{\lambda}{(k\pi)^2}\right),$$

где λ_k, $k = 1, \ldots, M$,— собственные числа соответствующего ядра, а для собственных чисел с номерами больше M используется приближенная формула $\lambda_k \approx [(k + 1)\pi]^2$.

Для окончательного вычисления функции распределения ω^2 использовалась формула Смирнова [1]

$$\mathbf{P}(\omega^2 > x) = 1 + \frac{1}{\pi} \sum^{\infty} (-1)^k \int_{\lambda_{2k-1}}^{\lambda_{2k}} \frac{e^{-\lambda x/2}}{\sqrt{-D(\lambda)}} \frac{d\lambda}{\lambda}. \tag{1}$$

Применялся метод интегрирования, указанный для этой формулы в статье [4]. Наличие множителя $e^{-\lambda x/2}$ под знаками интегралов обеспечивает быструю сходимость ряда (1) даже при малых значениях x.

Справедлива теорема: *если для всех $k > K$ и некоторого значения x выполнено условие*

$$x \geqslant \frac{1}{\lambda_{2k+1}-\lambda_{2k}} \ln\left(\frac{\lambda_{2k+2}-\lambda_{2k-1}}{\lambda_{2k+1}-\lambda_{2k}} \cdot \frac{\lambda_{2k}^2}{\lambda_{2k+1}^2}\right) + \frac{\lambda_{2k+2}-\lambda_{2k-1}}{\lambda_{2k+1}-\lambda_{2k}} \sum_{s=2k+3}^{\infty} \frac{1}{\lambda_s-\lambda_{2k+2}}$$

то при этом значении x члены ряда (1), *начиная с номера K, монотонно убывают.*

Таблицы функций распределения ω^2 для проверки гипотез H_1, H_2 и H_3 будут опубликованы.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Н. В. Смирнов, О распределении ω^2-критерия Мизеса, Матем. сб., 2, 1 (1937), 973—993.

[2] И. И. Гихман, При одне питання з теорії ω^2-крітерія, Матем. збірнік Київськ. держ. ун-ту, 5 (1954), 51—59.

[3] M. Kac, J. Kiefer, J. Wolfowitz, On test of normality and other tests of goodnes-of-fit based on distance methods, Ann. Math. Statist., 26, 2 (1955), 189—211.

[4] A. Grad., H. Solomon, Distribution of quadratic forms and some applications, Ann. Math. Statist., 26, 3 (1955), 464—477.

Заседание 10 апреля.

Орлов А. И. Необходимые и достаточные условия в предельной теории статистик интегрального типа.

Пусть $f_\alpha(x, \omega)$ — сепарабельные случайные вектор-функции, $\omega \in \Omega_\alpha$, при каждом ω задана функция распределения $F_\alpha(x, \omega)$. Без ограничения общности будем считать, что x лежат в кубе $[0, 1]^k$. Значения α образуют направленное множество, переход к пределу по которому обозначим $\alpha \to \infty$. Пусть $F(x)$ — неслучайная функция распределения на $[0, 1]^k$, а

$$\xi_\alpha = \int\limits_{[0,1]^k} f_\alpha(x, \omega)\, dF_\alpha(x, \omega), \qquad \eta_\alpha = \int\limits_{[0,1]^k} f_\alpha(x, \omega)\, dF(x)$$

являются случайными векторами. К η_α можно применять обычную предельную теорию случайных процессов. Поэтому полезно уметь переходить от ξ_α к η_α.

Рассмотрим разбиение T куба $[0, 1]^k$ на параллелепипеды, в вершинах которых $F(x)$ непрерывна (ребра параллельны осям координат). Пусть $\lambda(T)$ — максимальная из длин ребер параллелепипедов разбиения, $\delta_i(f_\alpha, \omega)$ — колебание $f_\alpha(x, \omega)$ на i-м параллелепипеде Δ_i, т. е. $\delta_i(f_\alpha, \omega) = \sup\{|f_\alpha(x, \omega) - f_\alpha(x', \omega)|, x, x' \in \Delta_i\}$, $F(\Delta_i)$ — мера Δ_i, порожденная $F(x)$.

Теорема 1. *Из сходимости по вероятности $F_\alpha(x, \omega)$ при $\alpha \to \infty$ к $F(x)$ во всех точках непрерывности $F(x)$ тогда и только тогда следует, что $\xi_\alpha - \eta_\alpha \to 0$ по вероятности когда $f_\alpha(x, \omega)$ по вероятности асимптотически интегрируемы по Риману — Стилтьесу по $F(x)$, т. е. при $\lambda(T) \to 0$ и $\alpha \to \infty$ по вероятности*

$$\sum_T \delta_i(f_\alpha, \omega) F(\Delta_i) \to 0. \tag{1}$$

В частном случае одноточечного вероятностного пространства и $f_\alpha = f$ теорема 1 дает следующее обобщение известной теоремы Хелли: из сходимости в основном к $F(x)$ последовательности неубывающих ограниченных в совокупности функций $F_n(x)$;

$n = 1, 2, \ldots$, тогда и только тогда следует, что

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f(x)\, dF_n(x) = \int_a^b f(x)\, dF(x),$$

когда $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$ по Риману — Стилтьесу по $F(x)$ (a и b — точки непрерывности $F(x)$).

Условие (1) выполнено для обычно встречающихся процессов, в частности, для эмпирического процесса $\sqrt{n}(F_n(x) - F(x))$, где $F_n(x)$ — эмпирическая функция распределения; для $\sqrt{n}(F(x \mid \hat{a}_1, \ldots, \hat{a}_q) - F(x \mid a_1, \ldots, a_q))$, где $\hat{a}_1, \ldots, \hat{a}_q$ — оценки параметров $a_1, \ldots, a_q$ (при некоторых ограничениях на $F(x \mid a_1, \ldots, a_q)$ и $\hat{a}_1, \ldots, \hat{a}_q$); для используемого в теории ранговых статистик процесса $\theta_n(x)$, траектории которого — ломаные с вершинами в $(i/n, \theta_n(i/n))$, $\theta_n(i/n) = \sqrt{n}(\xi_{ni} - i/n)$, где ξ_{ni} есть i-я порядковая статистика в выборке из равномерного распределения на $[0, 1]$.

Теорема 2. *Пусть $f_{1\alpha}(x, \omega)$ и $f_{2\alpha}(x, \omega)$ удовлетворяют условию* (1) *и асимптотически ограничены по вероятности. Из этого тогда и только тогда следует, что $g_\alpha(x, f_{1\alpha}(x, \omega), f_{2\alpha}(x, \omega))$ также удовлетворяют условию* (1), когда *при $\alpha \to \infty$, $\varepsilon \to 0$, $\lambda(T) \to 0$ для всех a*

$$\sum_T \sup_{A(i)} | g_\alpha(x, y) - g_\alpha(x', y') | \, F(\Delta_i) \to 0, \qquad (2)$$

где $A(i) = \{ | y | < a, | y - y' | < \varepsilon, x, x' \in \Delta_i\}$.

Теорема 3. *Из того, что функции распределения случайных векторов ξ_α сходятся в основном к $G(x)$ — функции распределения ξ, $x \in [0, 1]^k$, тогда и только тогда следует, что расстояние Леви между функциями распределения векторов $g_\alpha(\xi_\alpha)$ и $g_\alpha(\xi)$ стремится к 0 при $\alpha \to \infty$, когда для любого $\varepsilon > 0$ при $\lambda(T) \to 0$ и $\alpha \to \infty$ стремится к 0 величина $\Sigma' G(\Delta_i)$, где сумма берется по тем параллелепипедам разбиения, на которых колебание $g_\alpha(x)$ больше ε.*

Теорема 4. *Пусть при $\alpha \to \infty$ конечномерные распределения $(f_{1\alpha}(x, \omega), f_{2\alpha}(x, \omega))$ сходятся к конечномерным распределениям $(f_1(x, w), f_2(x, \omega))$, условие* (1) *выполнено для $f_{1\alpha}$ и $f_{2\alpha}$, условие* (2) *выполнено для $g_\alpha(x, y)$, по вероятности $F_\alpha(x, w)$ сходятся к $F(x)$ в каждой точке непрерывности $F(x)$. Тогда расстояние Леви между функциями распределения векторов*

$$\int_{[0,1]^k} g_\alpha(x, f_{1\alpha}(x, \omega), f_{2\alpha}(x, \omega))\, dF_\alpha(x, \omega), \quad \int_{[0,1]^k} g_\alpha(x, f_1(x, \omega), f_2(x, \omega))\, dF(x)$$

стремится к 0.

Замечания. 1. Если при каждом α функция распределения $F_\alpha(x, \omega)$ является случайным процессом, $f_\alpha(x, \omega)$ измерима по совокупности переменных и интегрируема по Риману — Стилтьесу по $F_\alpha(x, \omega)$ при почти всех ω, то ξ_α и η_α являются случайными векторами.

2. Условие (2) выполнено для непрерывных функций $g_\alpha = g(x, y)$.

3. В теоремах 2 и 4 можно рассматривать не две функции $f_{1\alpha}$ и $f_{2\alpha}$, а любое конечное число; размерность вектора y равна сумме размерностей $f_{1\alpha}$ и $f_{2\alpha}$.

4. Если в теореме 3 ограничиться случаем $g_\alpha = g$, то необходимым и достаточным условием будет интегрируемость g по Риману — Стилтьесу по $G(x)$.

5. Теоремы 1—3 можно рассматривать как решения в некоторых случаях *проблемы устойчивости* статистических процедур к возмущениям исходных данных.

В математической статистике часто применяются величины типа ξ_α, например, в двухвыборочной проблеме [1], для проверки нормальности [2], координатной независимости на торе [3], симметрии распределения [4] и т. д. Теоремы 1—4 позволяют обобщить результаты работ [1] — [4]. Отметим, что частные случаи теоремы 4 доказывались иногда с ошибками — [1] (исправлено в [5]), [3].

ЛИТЕРАТУРА

[1] M. Rosenblatt, Limit theorems associated with variants of the von Mises statistics, Ann. Math. Statist., 23, 4 (1952), 617—623.

[2] M. Kac, J. Kiefer, J. Wolfowitz, On the tests of goodness of fit based on distance methods, Ann. Math. Statist., 26, 2 (1955), 189—211.

[3] E. D. Rothman, Tests of coordinate independence for a bivariate sample on a torus, Ann. Math. Statist., 42, 6 (1971), 1962—1969.

[4] А. И. Орлов, О проверке симметрии распределения, Теория вероят. и ее примен., XVII, 2 (1972), 372—377.

[5] M. Fisz. On a result by M. Rosenblatt concerning the von Mises—Smirnov test, Ann. Math. Statist., 31, 2 (1960), 427—429.

Никулин М. С., О критерии хи-квадрат для непрерывных распределений.

Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_n$ — взаимно независимые одинаково распределенные случайные величины с функцией распределения $F(x, \theta)$ $(x \in R^1,\ \theta = (\theta_1, \ldots, \theta_s)^{\mathrm{T}} \in \Theta \subset R^s$, где Θ — открытое множество), и пусть $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_k)^{\mathrm{T}}$ — вектор такой, что все $p_j > 0$ и $p_1 + \ldots + p_k = 1$, $k = \mathrm{const} \geqslant 2$. Положим

$$F^{-1}(a, \theta) = \inf\{\boldsymbol{x} : F(x, \theta) \geqslant a\}, \qquad 0 < a < 1, \theta \in \Theta,$$

и пусть $x_u(\theta) = F^{-1}(p_1 + \ldots + p_u, \theta)$, $u = 1, \ldots, k-1$, $x_k = -x_0 = +\infty$. Тем самым при каждом $\theta \in \Theta$ определяется разбиение действительной прямой на k класс-интервалов с граничными точками $x_0, x_1(\theta), \ldots, x_{k-1}(\theta), x_k$.

Предположим, что

1) *$F(x, \theta)$ имеет плотность вероятности $f(x, \theta)$, причем все $\partial^2 f(x, \theta)/\partial\theta_u\partial\theta_v$ существуют и непрерывны на $R^1 \times \Theta$;*

2) *информационная матрица $i = \| i_{uv} \|$, соответствующая одному наблюдению ξ_j, существует и положительно определена при любом $\theta \in \Theta$; все частные производные $\partial i_{uv}/\partial\theta_j$ от элементов информационной матрицы непрерывны на Θ;*

3) *допустимо дифференцирование по параметрам под знаком интеграла*

$$\int f(\boldsymbol{x}, \theta)\, d\boldsymbol{x} = 1, \textit{ т. е. } \qquad \frac{\partial}{\partial\theta_u}\int f(\boldsymbol{x}, \theta)\, dx = \int \frac{\partial}{\partial\theta_u} f(x, \theta)\, dx, \quad u = 1, \ldots, s,$$

причем матрица $W = \| w_{uv} \|$ с элементами

$$w_{uv} = \int\limits_{x_{v-1}(\theta)}^{x_v(\theta)} \frac{\partial}{\partial\theta_u} f(x, \theta)\, dx, \qquad u = 1, \ldots, s;\ v = 1, \ldots, k,$$

имеет ранг s;

4) *производные $\partial x_u(\theta)/\partial\theta_v$ $(u = 1, \ldots, k;\ v = 1, \ldots, s)$ существуют и непрерывны при всех $\theta \in \Theta$.*

Пусть $\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \ldots, \nu_k)^{\mathrm{T}}$ — вектор частот, полученных в результате группировки случайных величин $\xi_1, \ldots, \xi_n$ по интервалам со случайными граничными точками $x_0, x_1(\hat\theta), \ldots, x_k$, которые получаются из указанных выше граничных точек заменой неизвестного θ наиболее правдоподобной оценкой $\hat\theta$, вычисленной по негруппированным значениям $\xi_1, \ldots, \xi_n$.

Как показал Мур [1], вектор $\boldsymbol{\nu}$ распределен асимптотически нормально с параметрами $\mathbf{E}\boldsymbol{\nu} = n\mathbf{p} + O(1)$ и $\mathbf{E}(\boldsymbol{\nu} - n\mathbf{p})(\boldsymbol{\nu} - n\mathbf{p})^{\mathrm{T}} = n\mathbf{B} + O(1)$, где $\mathbf{B} = \mathbf{D} - \mathbf{p}\mathbf{p}^{\mathrm{T}} - \mathbf{W}^{\mathrm{T}} i^{-1}\mathbf{W}$, $\mathbf{D}$ — диагональная матрица с элементами $p_1, \ldots, p_k$ на главной диагонали, причем согласно предположению 3 для элементов матрицы $\mathbf{W}$ справедлива формула

$$w_{uv} = -f[x_v(\theta), \theta]\frac{\partial x_v}{\partial\theta_u} + f[x_{v-1}(\theta), \theta]\frac{\partial x_{v-1}}{\partial\theta_u}.$$

Матрица $\mathbf{B}$ вырожденная, в то время как матрица $\widetilde{\mathbf{B}}$, получающаяся в результате вычеркивания в $\mathbf{B}$ последних строки и столбца, имеет обратную матрицу $\widetilde{\mathbf{B}}^{-1} = \mathbf{A} + \mathbf{A}\widetilde{\mathbf{W}}^{\mathrm{T}} (i - \widetilde{\mathbf{W}}\mathbf{A}\mathbf{W}^{\mathrm{T}})^{-1}\widetilde{\mathbf{W}}\mathbf{A}$, где $\mathbf{A} = \widetilde{\mathbf{D}}^{-1} + (1/p_k)\, \mathbf{1}\mathbf{1}^{\mathrm{T}}$, $\widetilde{\mathbf{D}}^{-1}$ — диагональная матрица с элементами $1/p_1, \ldots, 1/p_{k-1}$ на главной диагонали, $\mathbf{1}$ — вектор размерности $(k-1)$, все элементы которого равны 1, $\widetilde{\mathbf{W}}$ — матрица, получаемая из $\mathbf{W}$ вычеркиванием последнего столбца.

Из этих результатов следует, что вектор $\widetilde{\mathbf{v}} = (\nu_1, \ldots, \nu_{k-1})^{\mathrm{T}}$ при $n \to \infty$ распределен асимптотически нормально с параметрами $\boldsymbol{E}\widetilde{\mathbf{v}} = n\widetilde{\mathbf{p}} + O(1)$ и $\mathbf{E}(\widetilde{\mathbf{v}} - n\mathbf{p})(\widetilde{\mathbf{v}} - n\widetilde{\mathbf{p}})^{\mathrm{T}} = n\widetilde{\mathbf{B}} + O(1)$, поэтому *статистика* $Y^2(\theta) = n^{-1}(\widetilde{\nu} - n\widetilde{\mathbf{p}})^{\mathrm{T}}\widetilde{\mathbf{B}}^{-1}(\widetilde{\nu} - n\widetilde{\mathbf{p}})$ *имеет в пределе при* $n \to \infty$ *распределение хи-квадрат с* $(k-1)$ *степенями свободы*. Статистику $Y^2(\theta)$ можно представить в другой более удобной для вычислений форме:

$$Y^2(\theta) = X^2 + n^{-1}\alpha^{\mathrm{T}}(\theta)\,\Lambda(\theta)\,\boldsymbol{\alpha}(\theta),$$

где

$$X^2 = \sum_{j=1}^{k} \frac{(\nu_j - np_j)^2}{np_j}, \quad \Lambda(\theta) = \left\| i_{uv} - \sum_{j=1}^{k} \frac{w_{uj}w_{jv}}{p_j} \right\|^{-1}$$

и $\boldsymbol{\alpha}(\theta) = (\alpha_1, \ldots, \alpha_s)^{\mathrm{T}}$, причем $\alpha_u = w_{u1}\nu_1/p_1 + \ldots + w_{uk}\nu_k/p_k$.

Если в $Y^2(\theta)$ заменить θ любой состоятельной оценкой θ^* (в частности, можно в качестве θ^* выбрать наиболее правдоподобную оценку $\hat{\theta}$, о которой говорилось выше), то предельное распределение статистики критерия не изменится, т. е. $Y^2(\theta^*)$ *имеет в пределе при* $n \to \infty$ *распределение хи-квадрат с* $(k-1)$ *степенями свободы.*

Предположим теперь, что проверяемая гипотеза о принадлежности закона распределения случайных величин параметрическому семейству $f(x, \theta)$ неверна, и что в действительности плотность вероятности выражается формой

$$g(x, \theta) = f(x, \theta) + n^{-1/2}\delta(x, \theta),$$

причем предполагается, что все частные производные $\partial^2\delta/\partial\theta_u\partial\theta_v$ существуют и непрерывны на $R^1 \times \Theta$. Тогда при $j = 1, \ldots, k$

$$\int\limits_{x_{j-1}(\theta)}^{x_j(\theta)} g(x, \theta)\,dx = p_j + \frac{1}{\sqrt{n}} c_j(\theta), \qquad \text{где} \qquad c_j(\theta) = \int\limits_{x_{j-1}(\theta)}^{x_j(\theta)} \delta(x, \theta)\,dx.$$

В этих условиях указанные выше *статистики* $Y^2(\theta)$ и $Y^2(\theta^*)$ *будут иметь в пределе при* $n \to \infty$ *нецентральное распределение хи-квадрат с* $(k-1)$ *степенями свободы и параметром нецентральности*

$$\varkappa(\theta) = \sum_{j=1}^{k} \frac{c_j^2(\theta)}{p_j} + \mathbf{d}^{\mathrm{T}}(\theta)\,\Lambda(\theta)\,\mathbf{d}(\theta),$$

где $\mathbf{d}(\theta) = (d_1, \ldots, d_s)^{\mathrm{T}}$, $d_u = w_{u1}c_1(\theta)/p_1 + \ldots + w_{uk}c_k(\theta)/p_k$, $u = 1, \ldots, s$ и $\Lambda(\theta)$ — матрица, о которой говорилось выше.

Подробное изложение результатов этого сообщения для гипотетического семейства распределений, зависящего от параметров сдвига и масштаба, дано в статье [2], где, в частности, обсуждается вопрос о проверке гипотезы нормальности.

ЛИТЕРАТУРА

[1] D. S. M o o r e, A chi-square statistic with random cell boundaries, Ann. Math. Statist., **42**, 1 (1971), 147—156.

[2] М. С. Н и к у л и н, Критерий хи-квадрат для непрерывных распределений с параметрами сдвига и масштаба, Теория вероят. и ее примен., **XVIII**, 3 (1973), 583—591.

Заседание 24 апреля.

Айвазян С. А., Об экспертно-статистическом методе построения целевой функции (на примере хоккея).

Заседание 22 мая.

Клигене С.-Н. И., Оценка момента изменения параметров распределения случайных последовательностей.

В автоматическом управлении, в технической и медицинской диагностике встречаются задачи, в которых параметры распределения исследуемого случайного процесса $\{X(t),\ t \in T\}$ скачкообразно меняются в неизвестный момент времени $t = \eta$. По наблюдаемой реализации $x(t),\ t \in T_1,\ T_1 < T$, этого процесса требуется определить момент изменения (м. и.).

Задача обнаружения м. и. решалась в [1], [2] при предположениях, что $\{X(t),\ t = 1, 2, \ldots\}$ является случайной последовательностью (сл. п.) взаимно независимых (вз. н.) случайных величин (сл. в.)[1], или, что процессы до изменения и после изменения гауссовы, вз. н. [2]. Настоящее сообщение излагает некоторые результаты оценки м. и. параметров гауссовых сл. п., описываемых линейными разностными уравнениями конечного порядка типа авторегрессии и авторегрессии- скользящего среднего (а.-с.с.).

Пусть м. и. η является сл. в. с целочисленными значениями $n = \ldots, 1, 2, \ldots$. Исследуем сл. п. $\{X_t,\ t = \ldots, 1, 2, \ldots\}$, $\mathrm{M}\{X_t\} \equiv 0$, описываемую уравнением авторегрессии m-го порядка

$$\sum_{\nu=0}^{m} \theta_\nu(t)\, X_{t-\nu} = \zeta_t, \tag{1}$$

где $\{\zeta_t\}$ — сл. п. вз. н. гауссовых сл. в., $\mathrm{M}\zeta_t = 0$, $\mathrm{M}\zeta_t^2 = 1$, не зависящих от η, и параметры

$$\theta(t) = \begin{cases} \theta^{(1)}(t) = (\theta_0^{(1)}(t), \theta_1^{(1)}(t), \ldots, \theta_m^{(1)}(t)), & t = \ldots, n-1, n, \\ \theta^{(2)}(t) = (\theta_0^{(2)}(t), \theta_1^{(2)}(t), \ldots, \theta_r^{(2)}(t), 0, \ldots, 0), & t = n+1, n+2, \ldots \end{cases} \tag{2}$$

Пусть $\theta_0^{(i)}(t) \neq 0$, $i = 1, 2$, и для каждого $t = \ldots, 1, 2, \ldots$ корни $z_{kt}^{(i)}$ характеристических полиномов $\sum_{\nu=0}^{m} \theta_\nu^{(i)}(t)\, z^{m-\nu}$ удовлетворяют неравенству:

$$|z_{kt}^{(i)}| < 1,\quad i = 1, 2;\ k = 1, 2, \ldots, m. \tag{3}$$

Оценка максимального правдоподобия (м. п.) $\hat{n}$ м. и. n по наблюдаемой реализации $x_1, x_2, \ldots, x_N$, $N > m$, сл. п. $\{X_t\}$ получена [3, 4] в случаях, когда: 1) известны или ковариационные матрицы (ков. м.) сл. п., или $\theta^{(i)}(t)$, $i = 1, 2$, $t = 1, 2, \ldots, N$; 2) параметры неизвестны, но постоянны до изменения и после изменения: $\theta^{(i)}(t) \equiv \theta^{(i)}$, $i = 1, 2$.

В первом случае м. и. оценивается по максимуму логарифмической функции правдоподобия

$$L(n \mid x_1, \ldots, x_N) = C - \sum_{t=m+1}^{n} \ln \sigma_1(t) - \sum_{t=n+1}^{N} \ln \sigma_2(t) - \frac{1}{2} \sum_{t=m+1}^{n} [(x_t + a_1^{(1)}(t)\, x_{t-1} + \ldots$$
$$\ldots + a_m^{(1)}(t)\, x_{t-m})^2/\sigma_1^2(t) - (x_t + a_1^{(2)}(t)\, x_{t-1} + \ldots + a_r^{(2)}(t)\, x_{t-r})^2/\sigma_2^2(t)], \tag{4}$$

рассматриваемой относительно возможных значений $n = m+1, \ldots, N-1$ м. и. $\eta = n$. Здесь $\sigma_i^2(t) = [\theta_0^{(i)}(t)]^{-2}$, $a_k^{(i)}(t) = \theta_k^{(i)}(t)/\theta_0^{(i)}(t)$, $k = 1, 2, \ldots, m$; $i = 1, 2$, и константой C обозначена часть выражения, независящая от n.

Во втором случае предполагается, что m, r известны, $n = m_0 + 1, \ldots, N - r_0$, $m < m_0 < N$, $r < r_0 < N$, а N — сколько угодно большое число наблюдений $x_1, \ldots, x_n$ сл. п. $\{X_t\}$. Для оценки $\hat{n}$ необходимо максимизировать $L(n, \theta^{(1)}, \theta^{(2)} | x_1, \ldots, x_N)$ относительно всех возможных n и $\theta^{(1)}$, $\theta^{(2)} \in \Theta$, где Θ — множество значений, для которых выполнено неравенство (3). Эта многопараметрическая задача обходится путем использования условных оценок м. п. параметров авторегрессии $\hat{\theta}^{(i)}_{[n]} = (\hat{\sigma}^2_{i[n]}, \hat{a}^{(i)}_{1[n]}, \ldots, \hat{a}^{(i)}_{m[n]})$, $i = 1, 2$, при условии $\eta = n$, вычисляемых для каждого возможного значения n. Следовательно, оценку $\hat{n}$ получим как

$$\max_{n=m_0+1,\ldots,N-r_0} L(n, \hat{\theta}^{(1)}_{[n]}, \hat{\theta}^{(2)}_{[n]} | x_1, \ldots, x_N) . \tag{5}$$

Оценка $\hat{\theta}^{(i)}_{[n]}$ параметров авторегрессии на основе наблюдений $x_1, \ldots, x_n$ стационарной сл. п. $\{X_1, \ldots, X_\eta\}$ известна [5]. Для оценки $\hat{\theta}^{(2)}_{[n]}$ доказано [4], что для каждого $\varepsilon > 0$ существует целое число $s_0 \geqslant 1$ такое, что условная ков. ф. $K_{s,t} = \mathrm{M}\{X_s X_t \mid \eta = n\}$ нестационарной сл. п. авторегрессии $\{X_t, t = \ldots, 1, 2, \ldots\}$, при $s, t \geqslant n + s_0$ удовлетворяет неравенству:

$$| K_{s,t} - K^{(2)}_{s-t} | < \varepsilon, \tag{6}$$

где $K^{(2)}_u = \mathrm{M}\{X^{(2)}_t X^{(2)}_{t+u}\}$ — ков. ф. стационарной сл. п. авторегрессии с параметрами $\theta^{(2)}$.

Аналогичные вопросы оценки м. и. решены для сл. п., описываемых уравнением а.-с. с.:

$$\sum_{\nu=0}^{p} \theta_\nu(t) X_{t-\nu} = \sum_{\nu=0}^{q} \theta_{p+\nu+1}(t) \zeta_{t-\nu}. \tag{7}$$

Для получения статистических выводов об истинном м. и. n_0 по оценке м. п. $\hat{n}$, исследована статистика отношения правдоподобия Λ_N. Показано, что $\Lambda_N = \max\{0, \sum_{j=1}^{k} Z_j, k = 1, 2, \ldots, N - n_0 - 1\}$, где $Z_1, \ldots, Z_k$ — вз. з. неодинаково распределенные сл. в., вычислена плотность $p_{Z_j}(z)$. Функция распределения $\mathrm{P}\{\Lambda_N \leqslant x\}$, необходимая для построения доверительного интервала м. и., неизвестна даже асимптотически, так как $Z_1, \ldots, Z_k$ не являются ни слабо зависимыми, ни стационарно связанными сл. в. Поэтому вопросы точности полученной оценки решались путем математического моделирования на ЦВМ.

Работоспособность предлагаемых методов проверена на моделированных при помощи ЦВМ сл. п. с заданными параметрами и м. и. Результаты применялись для оценки начала изменения сердечного ритма по наблюденной ритмограмме—записи интервалов времени между отдельными сокращениями сердца.

ЛИТЕРАТУРА

[1] D. V. Hinkley, Inference about the change point in a sequence of random variables, Biometrika, 57, 1 (1970), 1—17.

[2] L. A. Telksnys, Determination of changes in the properties and recognition of randem processes with a complicated structure, Proceedings of the 5-th IFAC World Congress, Paris, 1972.

[3] Н. И. Клигене, Определение момента изменения свойств авторегрессивной последовательности, Техническая кибернетика, Материалы 22 респуб. науч.-техн. конференции, Каунас, 1972, 222—225.

[4] N. J. Kligienė, Inference about the change point in the autoregressive sequence, Sbornik praći předn. na seminare o experimentalnim modelovani a rešene přavdepodobn. problem., Liblice u Prahy, 1973.

[5] U. Grenander, M. Rosenblatt, Statistical analysis of stationary time series, Uppsala, Almqvist & Wiksells, 1956.